Analysis

Allgemeines zu ganzrationalen Funktionen:

Standarddarstellung: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$. n ist der Grad des Polynoms, $a_n, \dots, a_0$ heißen Koeffizienten, a_n heißt Leitkoeffizient.

Polynomfunktion ist ein anderer Begriff für ganzrationale Funktion.

Ganzrationale Funktionen vom Grad 1 heißen auch lineare Funktionen. Ganzrationale Funktionen vom Grad 2 heißen auch quadratische Funktionen.

Nullstellen

Nullstellen von ganzrationalen Funktionen

Grad 1: $f(x) = a_1 x + a_0 = 0 \Rightarrow x = -\frac{a_0}{a_1}$.

Für alle weiteren Grade gilt: Ist der Leitkoeffizient $a_n \neq 1$, so teilen wir die ganze Gleichung durch a_n (das ist erlaubt, weil der Leitkoeffizient immer $\neq 0$ ist) und suchen die äquivalenten Lösungen von

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} = 0.$$

Mit dieser Vorbereitung können wir immer davon ausgehen, dass der Leitkoeffizient 1 ist.

Grad 2: $f(x) = x^2 + px + q = 0$. Wir haben hier $p = a_1$ und $q = a_0$ gesetzt, da wir hier allgemein die p/q -Formel anwenden: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Spezialfall $p = 0$: $x^2 + q = 0 \Rightarrow x^2 = -q \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-q} \Rightarrow |x| = \sqrt{-q} \Rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{-q}$

Spezialfall $q = 0$: $x^2 + px = 0 \Rightarrow x \cdot (x + p) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = -p$

Grad 3: Die allgemeine Lösung muss man nicht kennen, nur die für folgende Spezialfälle:

Spezialfall $a_2 = 0$ und $a_1 = 0$: $f(x) = x^3 + a_0 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-a_0}$

Spezialfall $a_0 = 0$: $f(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 + a_2 x + a_1) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x^2 + a_2 x + a_1 = 0$. Neben $x = 0$ findet man bis zu zwei weitere Lösungen durch Anwendung der p/q -Formel auf $x^2 + a_2 x + a_1 = 0$.

Grad 4: Auch hier muss nur folgende Spezialfälle kennen:

Spezialfall $a_3 = 0$ und $a_2 = 0$ und $a_1 = 0$: $f(x) = x^4 + a_0 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-a_0}$

Spezialfall $a_1 = 0$ und $a_0 = 0$: $f(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x^2 + a_2 x + a_1) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x^2 + a_3 x + a_2 = 0$. Neben $x = 0$ findet man bis zu zwei weitere Lösungen durch Anwendung der p/q -Formel auf $x^2 + a_2 x + a_1 = 0$.

Spezialfall $a_3 = 0$ und $a_2 = 0$: $f(x) = x^4 + a_2x^2 + a_0 \overset{z=x^2}{\Rightarrow} z^2 + a_2z + a_0 = 0$. Suche $z_{1/2}$ mit der p/q -Formel, für jedes gefundene $z \geq 0$ sind $x = -\sqrt{z}$ und $x = \sqrt{z}$ Nullstellen von $f(x)$.

Nullstellen von e^x und $\ln x$

$f(x) = e^x$ hat keine Nullstelle, also hat $e^x = 0$ keine Lösung. $f(x) = \ln(x)$ hat genau eine Nullstelle bei $x = 1$.

Nullstellen von Produkten von Funktionen

Eine Funktion, die das Produkt von zwei anderen Funktionen ist ($f(x) = g(x) \cdot h(x)$), so ist $f(x)$ genau dort 0, wo $g(x) = 0$ oder $h(x) = 0$ ist.

Schnittpunkte von Funktionen

Die Schnittstellen von zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bestimmen wir, in dem wir die Nullstellen der Funktion $f(x) - g(x)$ bestimmen. Die Schnittpunkte haben als x -Koordinate die Schnittstelle und als y -Koordinate den Funktionswert an dieser Stelle, der für $f(x)$ und $g(x)$ gleich sein muss.

Ableitung

Ableitung besonderer Funktionen

$f(x) = x^k$ mit einer beliebigen reellen Zahl k : $f'(x) = kx^{k-1}$

$f(x) = e^x, f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln(x), f'(x) = \frac{1}{x}$

Ableitungsregeln

Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Multiplikation mit einer Konstanten: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

Produktregel: $f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Was ist die Verkettung von Funktionen ($f(x) = g(h(x))$)? Wende zunächst die Funktion $h(x)$ auf x an, berechne also $y = h(x)$. Wende dann die Funktion $g(x)$ auf den Funktionswert, also auf y an: $f(x) = g(y)$. $h(x)$ heißt innere, $f(x)$ äußere Funktion.

Kettenregel: $f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$

Lokale Extrema, Wende- und Sattelpunkte

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum an der Stelle x_E : $f'(x_E) = 0$

Ist zusätzlich $f''(x_E) \neq 0$, so liegt an dieser Stelle tatsächlich ein lokales Extremum vor, und zwar für $f''(x_E) < 0$ ein lokales Maximum und für $f''(x_E) > 0$ ein lokales Minimum. Man sagt auch, dass $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$ eine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum sind.

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt an der Stelle x_W : $f''(x_W) = 0$

Ist zusätzlich $f'''(x_E) \neq 0$, so liegt an dieser Stelle tatsächlich ein Wendepunkt. Man sagt auch, dass $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$ eine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt ist.

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt, für den zusätzlich $f'(x_S) = 0$ gilt. Also ist $f'(x_S) = 0$ und $f''(x_S) = 0$ und $f'''(x_S) \neq 0$ eine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt an der Stelle x_S .

Haben wir die lokalen Extrem-, Wende- oder Sattelstellen berechnet, so erhalten wir die entsprechenden Punkte durch $(x_{E/W/S} | f(x_{E/W/S}))$.

Tangenten

Die Tangente an eine Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_T ist die lineare Funktion $t(x) = mx + b$, die an der Stelle x_T in Funktionswert und erster Ableitung mit $f(x)$ übereinstimmt: $f(x_T) = t(x_T)$ und $f'(x_T) = t'(x_T) = m$. Es gilt $m = f'(x_T)$ und $b = f(x_T) - f'(x_T) \cdot x_T$. Im Allgemeinen hat eine Funktion an jeder Stelle eine andere Tangente.

Analytische Geometrie/Lineare Algebra

Konvention: Die Punkte $A, B, \dots$ haben die Koordinaten $(a_1 | a_2 | a_3), (b_1 | b_2 | b_3), \dots$. Für ihre

Ortsvektoren schreiben wir $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \dots$

Der Vektor vom Punkt A zum Punkt B ist der Differenzvektor der Ortsvektoren von B und A :

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Lagebeziehungen

Bestimmung einer Gleichung (in Parameterform) der Geraden durch die Punkte A und B

Standardmäßig wählt man den Ortsvektor zum Punkt A als Stützvektor und den Vektor $\vec{AB}$ als Richtungsvektor: $g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Parameterform der Ebene, in der eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ und ein Punkt C liegen

Prüfe zunächst, ob C auf der g liegt: Wenn $\vec{c} = \vec{a} + r\vec{b}$ keine Lösung hat, liegt C nicht auf der Gerade und die Ebene ist eindeutig bestimmt.

Dann wählen wir $\vec{a}$ als Stützvektor, $\vec{b}$ als einen und $\vec{AC}$ als anderen Spannvektor: $E : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$

Lagebeziehung zwischen zwei Geraden $g_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + s \cdot \vec{b}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2$

Zunächst testet man, ob die Richtungsvektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ linear abhängig sind, ob also $\vec{b}_1 = k \cdot \vec{b}_2$ ist?

Falls das so ist, prüfen wir, ob der Stützvektor der einen Geraden auf der anderen liegt, also zum Beispiel $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + s\vec{b}_2$. Hat dieses lineare Gleichungssystem (aus 3 Gleichungen mit einer Unbekannten) eine Lösung (das kann man oft sehr schnell sehen, so dass der Einsatz des GTR nicht unbedingt erforderlich ist), so sind die Geraden identisch, ansonsten sind sie parallel.

Falls die Richtungsvektoren linear unabhängig sind, setzen wir das beide Geradengleichungen gleich und lösen das lineare Gleichungssystem. **Vorsicht:** Auch wenn der Parameter in der Aufgabenstellung in beiden Gleichungen den selben Namen hat, müssen wir hier zwei unterschiedliche verwenden: $\vec{a}_1 + s \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_2 + r \cdot \vec{b}_2$. Wir haben also ein LGS mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Zur Lösung empfiehlt sich der Einsatz des GTR. Hat dieses keine Lösung, so sind die Geraden windschief. Erhalten wir eine Lösung, so schneiden sich die Geraden in einen Punkt. Diesen können wir bestimmen, wenn wir den Wert für einen der Parameter in die zugehörige Gleichung einsetzen. Wenn wir den Lösungswert für den anderen Parameter in die andere Geradengleichung einsetzen, muss sich der selbe Punkt ergeben. Das kann man erwähnen, muss es aber nur bei expliziter Anforderung berechnen.

Lagebeziehung zwischen der Ebene $E : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ und der Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{d}$

Wir lösen das LGS $\vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} = \vec{p} + t \cdot \vec{d}$ mit dem GTR (auch hier müssen die drei Parameter r , s und t unterschiedlich sein – was hier aber schon der Fall).

Wenn das LGS keine Lösung hat, so ist die Gerade parallel zur Ebene. Hat das LGS unendliche viele Lösungen, so liegt die Gerade vollständig in der Ebene. Hat das LGS genau eine Lösung, so schneidet die Gerade die Ebene in einem Punkt. Um diesen zu bestimmen, setzt man den Lösungswert für t in die Gleichung von g ein.

Längen und Winkel

Die Länge eines Vektors ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate seiner Komponenten: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Diese Formel ergibt sich durch die zweifache Anwendung des Satzes von Pythagoras.

Der Abstand zweier Punkte A und B ist die Länge ihres Verbindungsvektors $d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren ist eine Zahl (=Skalar, daher der Name) die durch die Summe der Produkte der Komponenten gegeben ist: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Es gilt $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Für den Winkel α zwischen zwei Vektoren gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Hat der Ausdruck auf der rechten Seite den Wert 0, so sind die Vektoren rechtwinklig oder orthogonal zueinander. Ist es 1 (-1), so sind sie parallel (antiparallel). Im allgemeinen Fall wendet man auf den Wert der rechten Seite mit dem GTR $\cos^{-1}$, also die Umkehrfunktion des $\cos$, auf an, um den Winkel zu erhalten: $\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$. Geht es nur um die Frage, ob zwei Vektoren orthogonal zueinander sind oder nicht, reicht es, zu prüfen, ob $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gleich oder ungleich 0 ist.

Wichtig: Der Taschenrechner muss auf das Gradmaß eingestellt sein!