Korrekturen zur Version 6

Bestimmung von Null-, Extrem- und Wendestellen (Abschnitt 11, Seite 24):

Im zweiten Beispiel haben wir 1, -$\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$ als Nullstellen angegeben. Allerdings liegt -$\sqrt{3}$ nicht im Definitionsbereich der Funktion, da $\ln x$ nur für $x > 0$ definiert ist. Also sind 1 und $\sqrt{3}$ die Nullstellen der Funktion.

Integrationsmethoden (Abschnitt 15, Seite 32):

In dem Teil zur **Integration durch Substitution** stand an einigen Stellen fälschlicherweise $f'(x)$ statt $f(x)$, hier ist der ganze Teil komplett:

Integration durch Substitution: Die Substitutionsregel entsteht aus der Umkehrung der Kettenregel und lässt sich bei der Integration von verketteten Funktionen anwenden.

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \overset{t=g(x)}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, ist $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $f(g(x))\cdot g'(x)$.

Beispiel: Wir berechnen das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x+3}\, dx$. Wir wählen $f(x) = \frac{1}{x}$ als äußere Funktion und $g(x) = 2x+3$ als innere Funktion. Damit ergibt sich $F(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = 2$. Da $g'(x)$ eine Konstante ist, können wir den Faktor einfach hinzufügen und außerhalb des Integrals wieder neutralisieren:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x+3} \cdot 2\, dx = \frac{1}{2}\int_{g(-1)}^{g(1)} \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{1}^{5} \frac{1}{t}\, dt =$$

$$\frac{1}{2}\Big[\ln(t)\Big]_1^5 = \frac{1}{2}(\ln(5) - \ln(1)) = \frac{1}{2} \cdot \ln(5)$$

Scharen: Funktionen, Geraden und Ebenen mit einem Parameter (Abschnitt 29, Seite 60):

Leider waren die beiden letzten Beispiele ziemlich fehlerhaft, hier sind sie noch einmal komplett neu:

Beispiel: Bestimmung der Extrema von $f_a(x)$: Aus $f_a'(x) = 2x - a = 0$ und $f_a''(x) = 2 > 0$ folgt, dass $f_a(x)$ bei $x = \frac{a}{2}$ ein lokales Minimum hat. Der Funktionswert an der Stelle beträgt $f_a(\frac{a}{2}) = (\frac{a}{2})^2 - a \cdot \frac{1}{2}a + 1 = -\frac{1}{4}a^2 + 1$. Die Funktion $f_\pi(x)$ hat also ein lokales Minimum in $(\frac{\pi}{2}|-\frac{\pi^2}{4} + 1)$.

Beispiel aus der linearen Algebra: Wir untersuchen die Lagebeziehung (siehe Abschnitt 21) der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu den Geraden der Schar $h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

und bestimmen gegebenenfalls die Schnittpunkte:

Da $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ keine Lösung hat, schneiden sich g und h_a unabhängig von a in einem Punkt oder sind windschief. Das prüfen wir mit $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\a\\a^2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, woraus wir folgendes LGS erhalten:

$$\begin{array}{ll} r = 7 & \\ 2 = a \ \ +s & \Rightarrow s = 2 - a \\ 2 = a^2 +s & \overset{s=2-a}{\Rightarrow} 2 = a^2 - a + 2 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \end{array}$$

Da die letzte Gleichung dann und nur dann eine Lösung hat, wenn $a = 0$ oder $a = 1$ ist, schneiden sich nur die Geraden h_0 und h_1 mit g, und zwar in beiden Fällen im Punkt $(7|2|2)$, was man durch Einsetzen von $r = 7$ in die Gleichung von g sieht. Falls weder $a = 0$ noch $a = 1$ ist, sind h_a und g windschief.

Übrigens liegt tatsächlich ein LGS vor, obwohl der Parameter a in der zweiten Potenz vorkommt, denn die Parameter haben die „Funktion“ von Konstanten.

Stetige Zufallsverteilungen (Abschnitt 33, Seite 68):

Die Formel von Moivre-Laplace gilt für $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$.